

# Akademia Młodego Ekonomisty



## Matematyka finansowa wokół nas Michał Trzęsiok

Uniwersytet Ekonomiczny w Katowicach  
20 października 2014 r.

Organizatorzy



# Czym jest pieniądz?

**Pieniądz** - dobro, które jest powszechnie akceptowane jako forma płatności za inne towary i usługi



Trzy podstawowe funkcje pieniądza:

- środek wymiany
- miernik wartości
- finansowy składnik majątku

# Jak jest wartość tego laptopa?

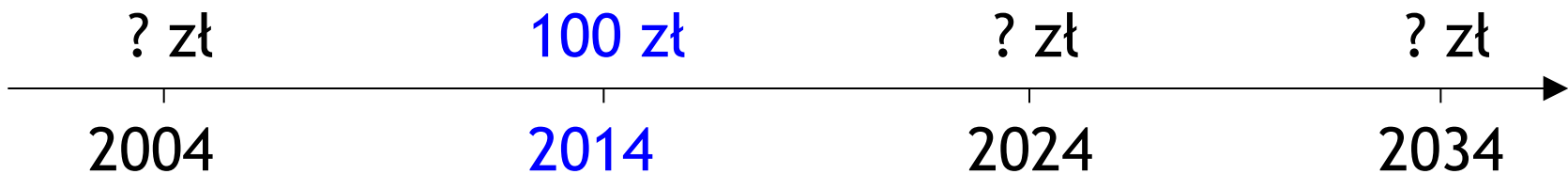


- trzy tygodnie mojej pracy
- 550 bochenków chleba
- 700 butelek piwa [ale ja nie lubię piwa]
- 2 450 zł [wartość wyrażona w pieniądzu = cena]

Jaka będzie wartość tego laptopa za 10 lat, za 20 lat?  
Jaka była jego wartość rok temu?

# Do zapamiętania!

Podobnie jak wartość dóbr i usług jest zmienna w czasie, tak i **wartość pieniądza jest zmienna w czasie**



# Co robić by zwiększać wartość posiadanych pieniędzy?

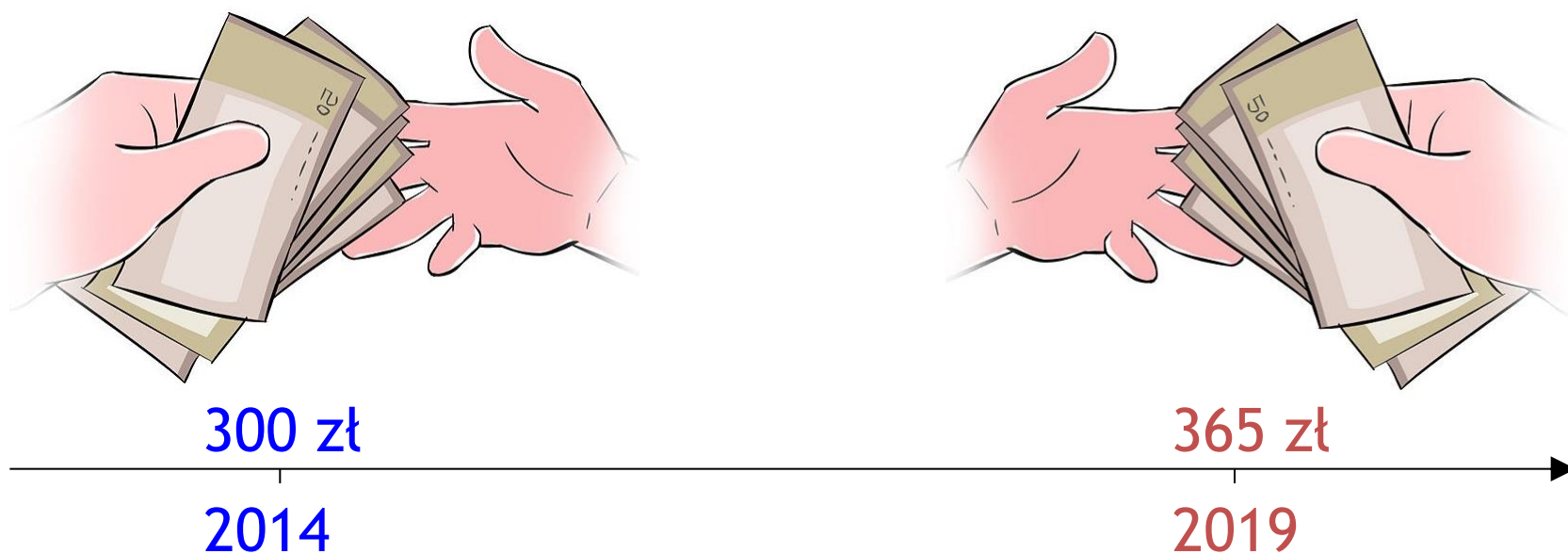
- inwestowanie
- oszczędzanie (np. założenie lokaty terminowej)



# Podstawowe pojęcia

**Odsetki** - dochód uzyskany z tytułu opłaty za użytkowanie kapitału przez dany okres

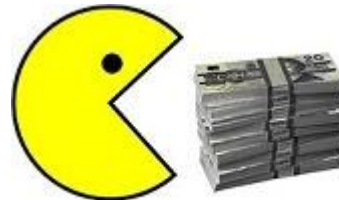
**Stopa procentowa** - stosunek odsetek za dany okres do kapitału, który był użytkowany



# Podstawowe pojęcia (2)

**Nominalna stopa procentowa** - stopa procentowa okresu bazowego (najczęściej rok) bez uwzględnienia inflacji

**Realna stopa procentowa** - nominalna stopa procentowa skorygowana o przewidywany poziom inflacji



$$r_{RE} = \frac{r_{NO} - i}{1 + i}$$

# Oprocentowanie proste i składane

**Kapitalizacja odsetek** - przekształcanie odsetek w kapitał po uzgodnionym czasie

Gdy kapitał użytkowany przez kilka uzgodnionych okresów, to różne sposoby kapitalizacji:

- **Oprocentowanie proste** - odsetki kapitalizowane na koniec wszystkich okresów (nie są doliczane wcześniej do kapitału) [leniwe odsetki - nie pracują; rzadki przypadek]
- **Oprocentowanie składane** - odsetki kapitalizowane na koniec każdego okresu umownego



# Oprocentowanie proste i składane (2)

Składamy kapitał **1000 zł** na lokacie na **30 lat**  
z oprocentowaniem o rocznej stopie procentowej równej **4%**

## Oprocentowanie proste

	kapitał	odsetki
1 rok	1 000 zł	40 zł
2 lata	1 000 zł	80 zł
5 lat	1 000 zł	200 zł
10 lat	1 000 zł	400 zł
30 lat	<b>2 200 zł</b>	1 200 zł

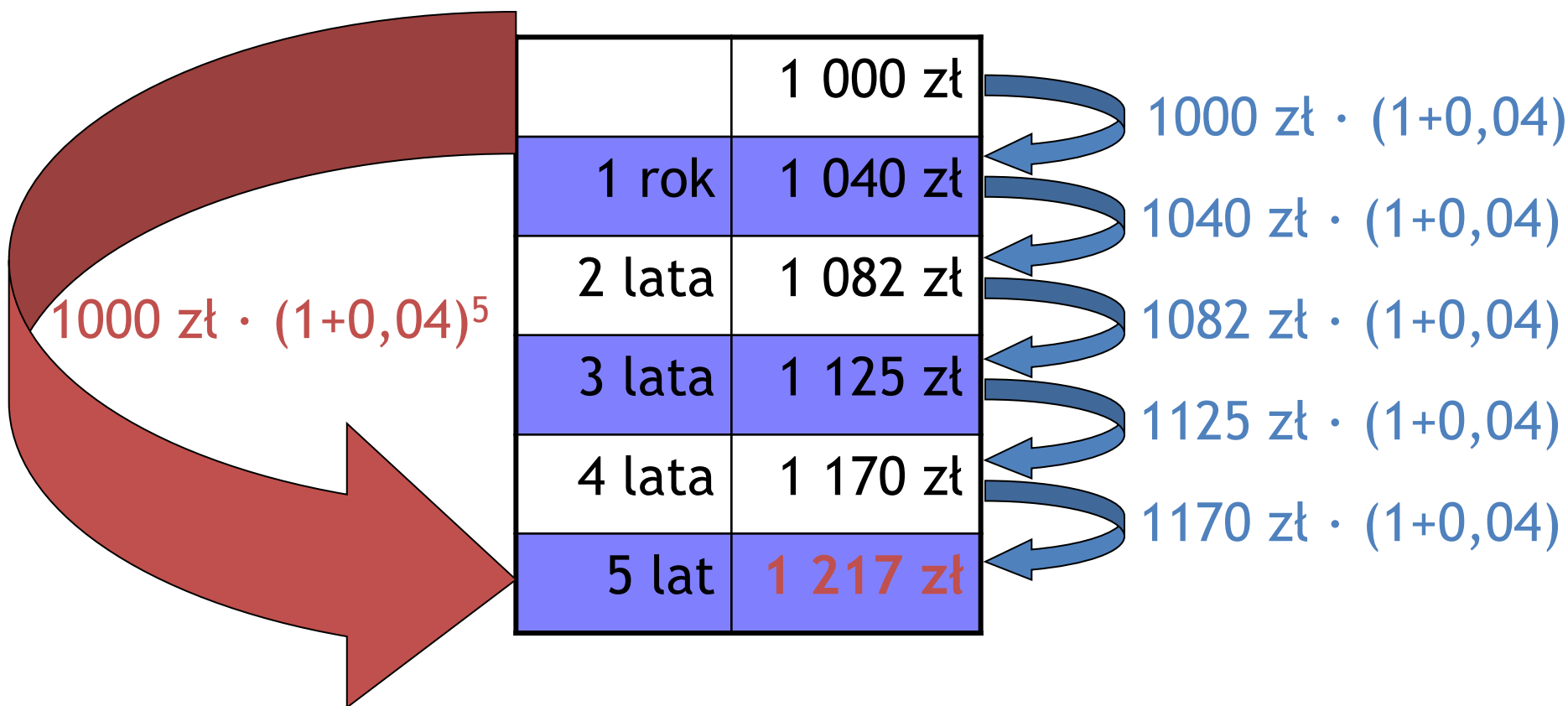
## Oprocentowanie składane

	kapitał	odsetki
1 rok	1 040 zł	40 zł
2 lata	1 082 zł	82 zł
5 lat	1 217 zł	217 zł
10 lat	1 480 zł	480 zł
30 lat	<b>3 243 zł</b>	2 243 zł

# Oprocentowanie składowane - obliczanie

Składamy kapitał **1000 zł** na lokacie na **30 lat**  
z oprocentowaniem o rocznej stopie procentowej równej **4%**

## Oprocentowanie składowane



# Oprocentowanie składane - ogólny wzór

## Oprocentowanie składane

$$K_n = K_0 \cdot (1 + r)^n$$

$K_n$  – kapitał po  $n$  okresach (np. po  $n$  latach)

$K_0$  – kapitał początkowy

$r$  – stopa procentowa dla pełnego jednego okresu (np. 1 roku)

$n$  – liczba okresów (np. liczba lat)

# Oprocentowanie składane - ogólny wzór

## Oprocentowanie składane z kapitalizacją w podokresach

- nieco trudniejszy przypadek

$$K_n = K_0 \cdot \left(1 + \frac{r}{k}\right)^{k \cdot n}$$

$K_n$  — kapitał po  $n$  okresach (np. po  $n$  latach)

$K_0$  — kapitał początkowy

$r$  — stopa procentowa dla pełnego jednego okresu (np. 1 roku)

$n$  — liczba okresów (np. liczba lat)

$k$  — liczba podokresów (kapitalizacja po każdym podokresie, np. po kwartale)

**Przykład.** Składamy 12 000 zł na 4 miesięcznej, odnawialnej lokacie z roczną stopą oprocentowania równą 3,5%. Jaki kapitał zgromadzimy po 2 latach?

# Siła oprocentowania składanego

Efekt skali - szczególnie widoczny przy wysokich stopach procentowych  
Kapitał początkowy  $K_0 = 12\ 000\text{zł}$ , stopa procentowa równa  $r$

	$r = 4\%$	$r = 5\%$	$r = 10\%$	$r = 15\%$
	kapitał	kapitał	kapitał	kapitał
1 rok	12 490 zł	12 600 zł	13 200 zł	13 800 zł
2 lata	12 979 zł	13 230 zł	14 520 zł	15 870 zł
5 lat	14 600 zł	15 315 zł	19 326 zł	24 136 zł
10 lat	17 763 zł	19 547 zł	31 125 zł	48 547 zł
30 lat	<b>38 921 zł</b>	<b>51 863 zł</b>	<b>209 393 zł</b>	<b>794 541 zł</b>

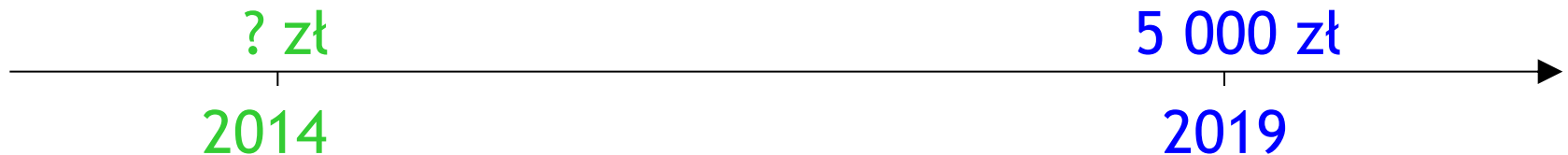
Tu widać przy okazji z grubsza na czym banki zarabiają pieniądze

# Dyskontowanie

**Oprocentowanie** - obliczanie wartości przyszłej kapitału



**Dyskontowanie** - obliczanie wartości bieżącej kapitału  
(operacja odwrotna do oprocentowania)



# Dyskontowanie - wzór

Korzystamy ze wzoru na oprocentowanie składane i wyznaczamy z niego wielkość kapitału początkowego  $K_0$

$$K_n = K_0 \cdot (1 + r)^n$$

**Przykład.** Chcę za 10 lat mieć do dyspozycji kwotę 45 000 zł. Ile muszę dziś wpłacić na lokatę, której roczna stopa procentowa jest równa 8% ? (kapitalizacja również jest roczna)

# Pomoc przy porównywaniu ofert banków

Przeszkody przy porównywaniu ofert różnych banków:

- różne momenty kapitalizacji odsetek,
- różne poziomy prowizji,
- różne okresy trwania lokaty

## **RRSO - Rzeczywista Roczna Stopa Oprocentowania**

całkowity koszt kredytu ponoszony przez konsumenta  
(procentowa wartość całkowitej kwoty kredytu na rok)

RRSO uwzględnia oprócz oprocentowania wszystkie prowizje, opłaty  
(choć niestety nie uwzględnia ubezpieczenia, jeśli takie jest doliczane)



**DZIĘKUJĘ ZA UWAGĘ !**

# Akademia Młodego Ekonomisty



## Matematyka finansowa wokół nas Michał Trzęsiok

Uniwersytet Ekonomiczny w Katowicach  
20 października 2014 r.

Organizatorzy

